



ETI / EI, 1^o Ano

UC: Análise Matemática II

Caderno 1 : Integrais Duplos e Integrais de Linha

(Duplos, Volumes, Mudança de Coordenadas, Integrais de Linha)

Elaborado de: **Diana Aldea Mendes e Rosário Laureano**

Departamento de Métodos Quantitativos

Fevereiro de 2011

Capítulo 1

Integrais Duplos

1.1 Integrais duplos - definição e interpretação

A definição de integral duplo (multiplo) é uma generalização da de integral a uma só variável. Em particular, o Teorema de Fubini, permite relacionar um integral definido em \mathbb{R}^n (integral multiplo) com o integral em \mathbb{R} . Nomeadamente, um integral multiplo pode ser calculado por integrações sucessivas numa variável considerando as restantes fixas (constantes). O integral duplo (multiplo) quando explicitado por intermédio de dois (vários) integrais simples designa-se por **integral iterado**.

Seja f uma função de duas variáveis, $z = f(x, y)$, que seja contínua numa certa região limitada e fechada D do xOy -plano. Tem-se $D \subset D_f \subset \mathbb{R}^2$. Na prática, para calcular um integral duplo $\iint_D f(x, y) dx dy$, temos que seguir os seguintes passos:

1. Representar graficamente o domínio de integração D
2. Estudar a regularidade do domínio de integração D e determinar a ordem de integração ($dx dy$ ou $dy dx$)
3. Explicitar os limites de integração e escrever o integral duplo na forma iterada
4. Calcular o integral duplo respeitando a ordem de integração

A principal dificuldade nos integrais duplos, consiste em, dado um domínio de integração D , determinar os limites de integração em cada um dos integrais simples envolvidos.

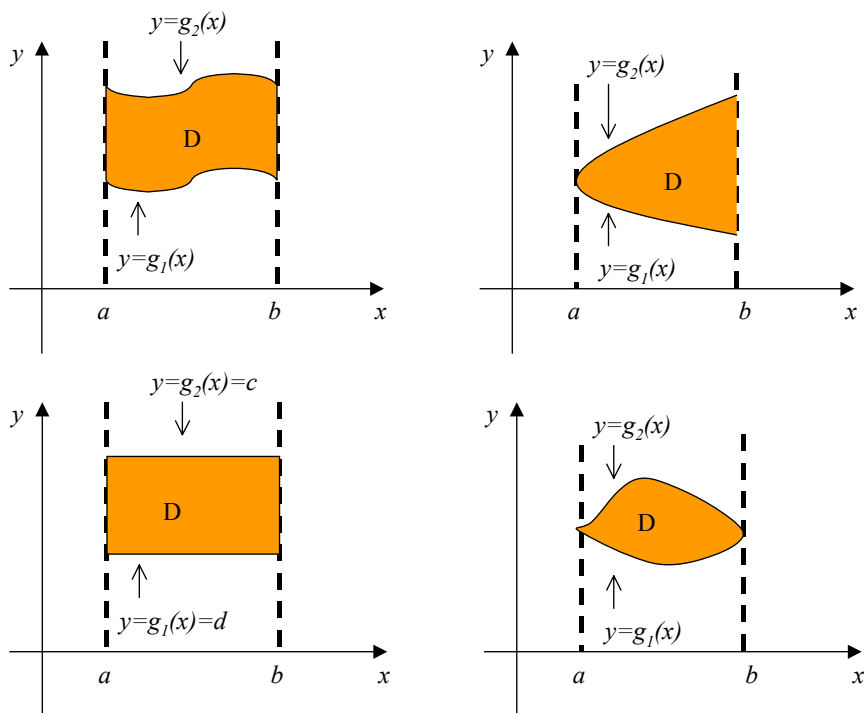
Definição 1.1.1 O domínio $D \subset \mathbb{R}^2$ diz-se regular segundo o eixo dos yy (no sentido do eixo dos yy) se

1. Qualquer vertical que passe por um ponto interior de D intersecta a sua fronteira em apenas dois pontos
2. D é limitado pelas curvas $y = g_1(x)$ e $y = g_2(x)$ e pelas rectas $x = a$ e $x = b$, sendo $g_1(x) \leq g_2(x)$ e $a \leq b$.

Se o domínio de integração D é regular no sentido do eixo dos yy (ou segundo o eixo dos yy), então a ordem de integração é $dydx$ e o integral duplo explicita-se (calcula-se) por

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy.$$

Graficamente, temos um domínio de integração regular no sentido do eixo dos yy , em cada uma das seguintes situações:



Deve ficar claro que o cálculo de um integral duplo requer o cálculo de 2 integrais simples pela ordem indicada: primeiro o integral de $f(x, y)$ em relação à variável y (con-

siderando x como constante) desde $y = g_1(x)$ (a fronteira inferior do domínio de integração D) até $y = g_2(x)$ (a fronteira superior de D); depois o integral da expressão obtida em relação à variável x no intervalo $[a, b]$, isto é, do extremo esquerdo do domínio de integração D até ao extremo direito de D .

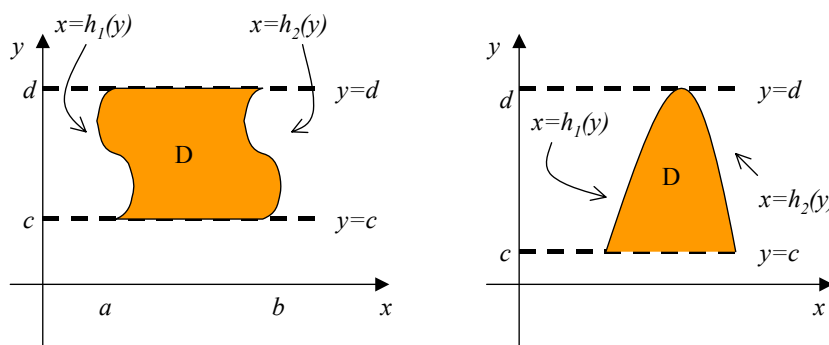
Definição 1.1.2 O domínio $D \subset \mathbb{R}^2$ diz-se regular segundo o eixo dos xx (no sentido do eixo dos xx) se

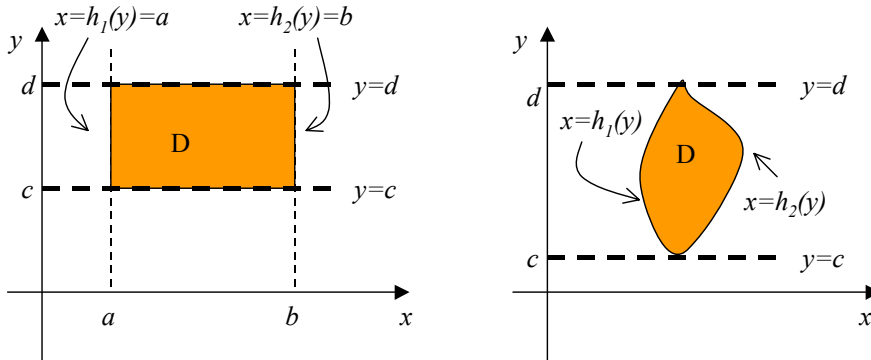
1. Qualquer horizontal que passe por um ponto interior de D intersecta a sua fronteira em apenas dois pontos
2. D é limitado pelas curvas $x = h_1(y)$ e $x = h_2(y)$ e pelas rectas $y = c$ e $y = d$, sendo $h_1(y) \leq h_2(y)$ e $c \leq d$.

Se o domínio de integração D é regular no sentido do eixo dos xx (ou segundo o eixo dos xx), então a ordem de integração é $dx dy$ e o integral duplo explicita-se (calcula-se) por

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy = \int_c^d dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx.$$

Graficamente, temos um domínio de integração regular no sentido do eixo dos xx , em cada uma das seguintes situações:





Neste caso, calcula-se primeiro o integral de $f(x, y)$ em relação à variável x (considerando y como constante) desde $x = h_1(y)$ (a fronteira esquerda do domínio de integração D) até $x = h_2(y)$ (a fronteira direita de D); depois o integral da expressão obtida em relação à variável y no intervalo $[c, d]$, isto é, do extremo inferior do domínio de integração D até ao extremo superior de D .

Tem-se sempre que

$$\int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy,$$

ou seja, indiferente da ordem de integração utilizada, o valor do integral duplo é o mesmo.

Propriedades

Caso existam os integrais duplos são válidas as seguintes propriedades operacionais:

$$\iint_D [f(x, y) \pm g(x, y)] dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy \pm \iint_D g(x, y) dx dy;$$

$$\iint_D c f(x, y) dx dy = c \iint_D f(x, y) dx dy, \text{ para } c \in \mathbb{R};$$

$$\iint_D h(x) f(x, y) dx dy = \int_a^b h(x) \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx;$$

$$\iint_D g(y) f(x, y) dx dy = \int_c^d g(y) \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy.$$

Uma outra propriedade de grande utilidade em domínios de integração não regulares é a seguinte:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy,$$

se $D = D_1 \cup D_2$, $\text{int}(D_1) \cap \text{int}(D_2) = \emptyset$, e D_1 e D_2 são regulares no mesmo sentido.

O integral duplo sobre o domínio de integração D da função constante $f(x, y) = 1$ define a área de D , isto é

$$\iint_D 1 \, dx dy = A(D).$$

A passagem duma ordem de integração para outra num integral duplo, caso é possível, designa-se por **inversão da ordem de integração do integral duplo**. Se o domínio for regular no sentido do eixo dos yy ou seja

1.2 Exemplos

Exemplo 1. Calcule o valor dos seguintes integrais duplos

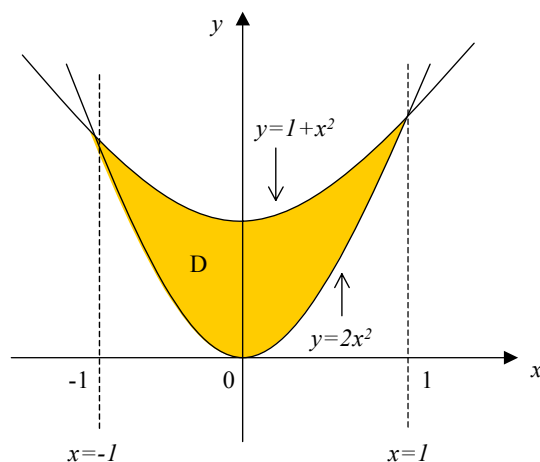
$$\text{a). } \int_1^2 dx \int_0^1 (x - \cos y) dy = \int_1^2 (xy - \sin y)|_0^1 dx = \int_1^2 (x - \sin 1) dx = \left(\frac{x^2}{2} - x \sin 1 \right) \Big|_1^2 = \frac{3}{2} - \sin 1$$

$$\text{b). } \int_0^5 dy \int_0^y (2xy) dx = \int_0^5 (yx^2)|_0^y dy = \int_0^5 (y^3) dy = \frac{y^4}{4} \Big|_0^5 = \frac{625}{4}$$

Exemplo 2. Determine o valor do integral duplo

$$\iint_D (x + 2y) \, dx dy$$

onde o domínio de integração é limitado pelas parábolas de equação $y = 2x^2$ e $y = 1 + x^2$.



Os pontos de intersecção das duas parábolas obtêm-se igualando as equações correspondentes, isto é

$$2x^2 = 1 + x^2 \Rightarrow x = \pm 1$$

sendo $x = \pm 1$ as equações das rectas verticais que limitam o domínio de integração. Conclui-se que D é regular no sentido do eixo dos yy , logo pode ser escrito como

$$D = \{-1 \leq x \leq 1, 2x^2 \leq y \leq 1 + x^2\}$$

deduzindo (também do gráfico) que $y = g_1(x) = 2x^2$ é a função inferior e $y = g_2(x) = 1 + x^2$ é a função superior que limitam o domínio de integração.

Da regularidade de D segundo o eixo dos yy obtêm-se a ordem de integração $dydx$, logo o integral duplo escreve-se como

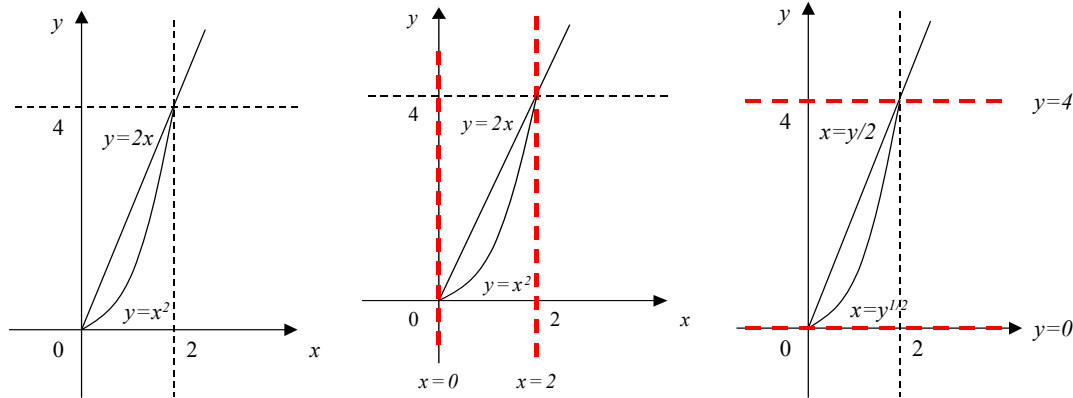
$$\begin{aligned} \iint_D (x + 2y) \, dx \, dy &= \int_{-1}^1 dx \int_{2x^2}^{1+x^2} (x + 2y) \, dy = \int_{-1}^1 (xy + y^2) \Big|_{2x^2}^{1+x^2} dx = \\ &= \int_{-1}^1 \left(x(1+x^2) + (1+x^2)^2 - x(2x^2) - (2x^2)^2 \right) dx = \\ &= \int_{-1}^1 (-3x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1) dx = \\ &= \left(-3\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{32}{15}. \end{aligned}$$

Portanto o valor do integral duplo é $32/15$.

Exemplo 3. Calcule do integral duplo da função $f(x, y) = x + y$ no domínio de integração D definido por

$$D \equiv \{y = 2x, y = x^2, 0 \leq x \leq 2\}.$$

A representação gráfica do domínio de integração é ilustrada na Figura abaixo.



Domínio de integração D D regular segundo yy D regular segundo xx

Como D é regular no sentido do eixo dos yy , ou seja pode ser limitado por: $x = a = 0$, $x = b = 2$, $y = g_1(x) = x^2$ e $y = g_2(x) = 2x$, com $0 \leq x \leq 2$ e $x^2 \leq y \leq 2x$, o integral duplo escreve-se como

$$\begin{aligned} \int \int_D (x + y) \, dx dy &= \int_0^2 \left(\int_{x^2}^{2x} (x + y) \, dy \right) dx = \int_0^2 \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{x^2}^{2x} dx = \\ &= \int_0^2 \left(4x^2 - x^3 - \frac{x^4}{2} \right) dx = \left(4\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10} \right) \Big|_0^2 = \frac{52}{15} \end{aligned}$$

O mesmo integral duplo pode ser calculado pelo outro integral iterado (obtido invertendo a ordem de integração), ou seja por

$$\int \int_D (x + y) \, dx dy = \int_0^4 \left(\int_{y/2}^{\sqrt{y}} (x + y) \, dx \right) dy = \frac{52}{15}.$$

Tem-se $c = 0, d = 4, x = h_1(y) = \frac{y}{2}$ e $x = h_2(y) = \sqrt{y}$, segundo a notação indicada no desenvolvimento.

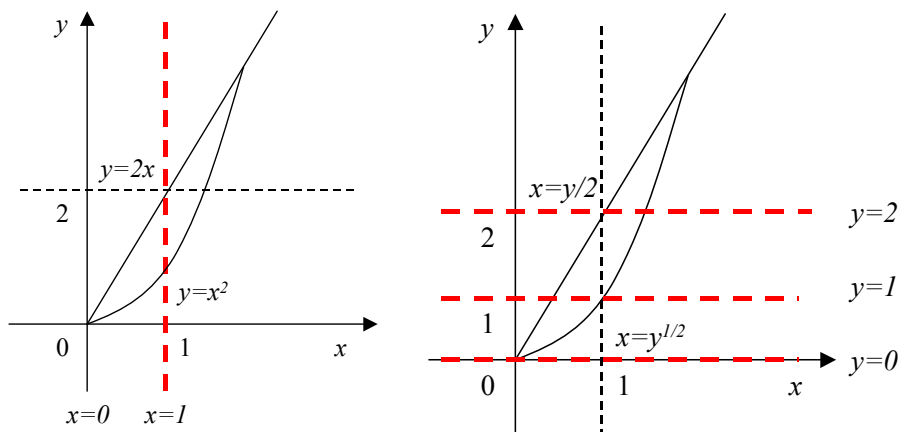
Exemplo 4. Considere-se agora o mesmo integral duplo, mas com o domínio de integração dado por

$$D \equiv \{y = 2x, y = x^2, 0 \leq x \leq 1\}.$$

Então o domínio D é regular no sentido do eixo dos yy e portanto o integral duplo é:

$$\begin{aligned} \int \int_D (x + y) \, dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{2x} (x + y) \, dy \right) dx = \int_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{x^2}^{2x} dx = \\ &= \int_0^1 \left(4x^2 - x^3 - \frac{x^4}{2} \right) dx = \left(4\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10} \right) \Big|_0^1 = \frac{118}{120} \end{aligned}$$

Se optarmos pela outra ordem de integração o mesmo integral duplo terá de ser calculado como segue:



$$\iint_D (x+y) \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_{y/2}^{\sqrt{y}} (x+y) \, dx \right) dy + \int_1^2 \left(\int_{y/2}^1 (x+y) \, dx \right) dy$$

dado que é necessário considerar 2 sub-regiões D_1 e D_2 separadas pela recta $y = 1$ tais que $D_1 \cup D_2 = D$. De facto, atendendo a que a recta vertical $x = 1$ intersecta a parábola $y = x^2$ quando y toma o valor 1 e intersecta a recta $y = 2x$ quando y toma o valor 2 (atenda à figura anterior e complete-a) estas duas sub-regiões serão as seguintes

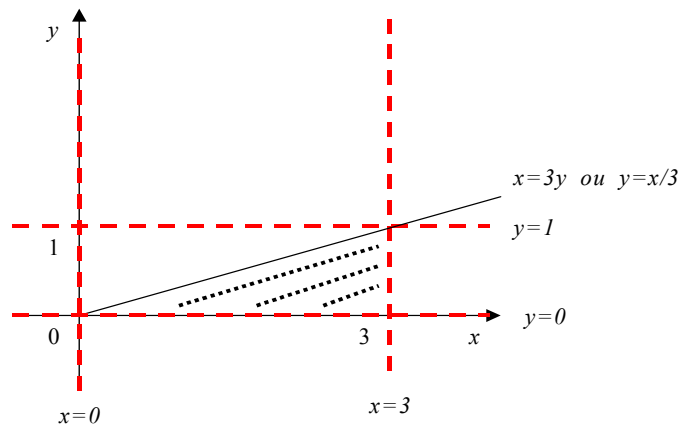
$$\begin{aligned} D_1 &\equiv \{y = 2x, y = x^2, 0 \leq x \leq 1, y \leq 1\} \\ D_2 &\equiv \{y = 2x, y = x^2, 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2\}. \end{aligned}$$

Por vezes é forçoso inverter a ordem de integração face à função $f(x, y)$ a primitivar.

Exemplo 5. Calcule o seguinte integral duplo

$$\int_0^1 dy \int_{3y}^3 e^{x^2} dx.$$

Este integral duplo não pode ser calculado de forma fácil directamente pela ordem de integração estabelecida ($dx dy$), visto que a primitiva $\int e^{x^2} dx$ não é uma primitiva elementar. O domínio de integração deste integral duplo é limitado pelas rectas $x = 3y$, $x = 3$, $y = 0$ e $y = 1$. Para estabelecer o outra ordem de integração ($dy dx$) – isto é, para **efectuar inversão da ordem de integração do integral duplo** – é útil representar graficamente este domínio de integração



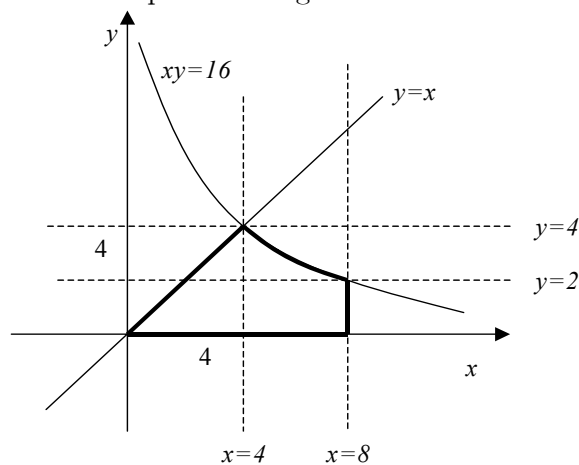
e, a partir dessa representação, escrever o novo integral iterado

$$\begin{aligned} \int_0^1 dy \int_{3y}^3 e^{x^2} dx &= \int_0^3 dx \int_0^{\frac{x}{3}} e^{x^2} dy = \int_0^3 \left(e^{x^2} y \right) \Big|_0^{\frac{x}{3}} dx = \\ &= \int_0^3 e^{x^2} \frac{x}{3} dx = \frac{1}{6} \left(e^{x^2} \right) \Big|_0^3 = \frac{1}{6} (e^9 - 1). \end{aligned}$$

Exemplo 6. Pretende-se calcular o integral duplo $\iint_D f(x,y) dx dy$ para $f(x,y) = x^2$ e D definido por

$$D \equiv \{xy = 16, y = x, y = 0, x = 8\}.$$

Para tal represente-se graficamente este domínio



e estabeleça-se as 2 ordens de integração:

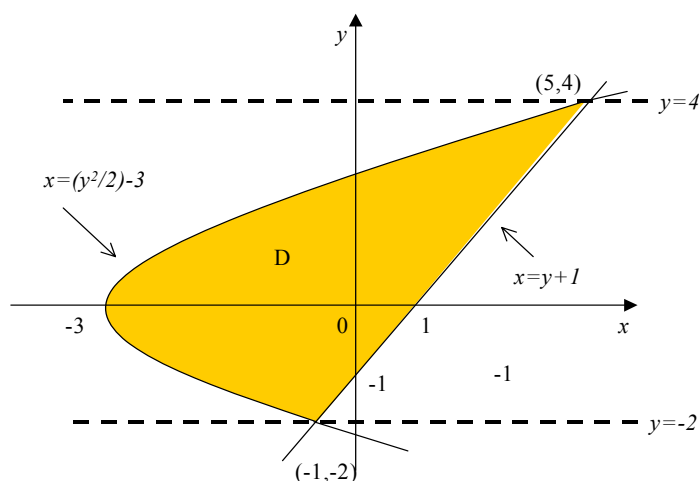
$$\iint_D x^2 dx dy = \int_0^2 dy \int_y^8 x^2 dx + \int_2^4 dy \int_y^{16/y} x^2 dx$$

$$\iint_D x^2 dx dy = \int_0^4 dx \int_0^x x^2 dy + \int_4^8 dx \int_0^{16/x} x^2 dy$$

Verifica-se através da figura que, qualquer que seja a ordem de integração escolhida, é necessário separar o domínio de integração em 2 sub-regiões, a saber: D_1 e D_2 separadas pela recta $y = 2$ quando a opção é $\int (\int f(x, y) dx) dy$, D'_1 e D'_2 separadas pela recta $x = 4$ quando a opção é $\int (\int f(x, y) dy) dx$. O cálculo de qualquer um destes integrais iterados conduz ao valor 448 para o integral duplo.

Exemplo 7. Determine o valor do integral duplo $\iint_D (xy) dx dy$ onde o domínio de integração D é limitado pelas curvas de equação $y = x - 1$ e $y^2 = 2x + 6$.

A parábola de equação $y^2 = 2x + 6$ tem a forma equivalente $y = \pm\sqrt{2x + 6}$ vista como função y de variável x e tem a forma $x = \frac{y^2}{2} - 3$ vista como função x de variável y . Os pontos de intersecção entre a parábola e a recta calculam-se de $2x + 6 = (x - 1)^2$, o que implica $x^2 - 4x - 5 = 0$, de onde $x = -1$ e $x = 5$.

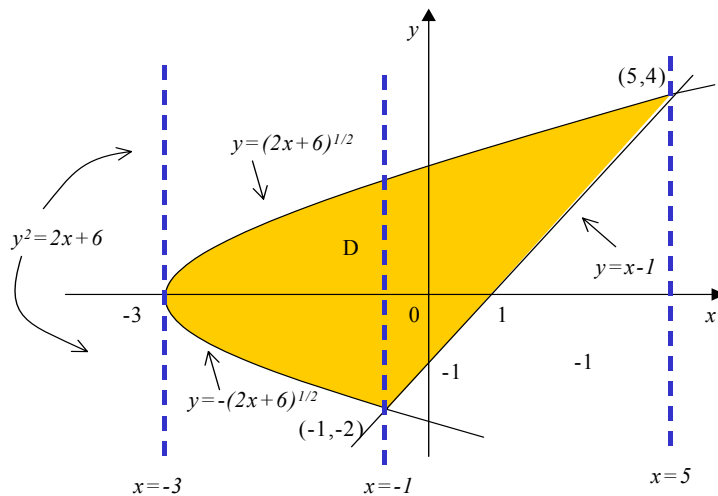


Consideramos a regularidade segundo o eixo dos xx (sendo mais fácil neste caso). Então o domínio de integração D é limitado pelas rectas horizontais de equação $y = -2$ e $y = 4$ (calculados como as imagens dos pontos de intersecção $x = -1$ e $x = 5$), e pelas curvas: á esquerda $x = h_1(y) = \frac{y^2}{2} - 3$ e á direita $x = h_2(y) = y + 1$, logo, a ordem de

integração $dx dy$ determina o seguinte integral iterado

$$\begin{aligned}
 \iint_D (xy) \, dx dy &= \int_{-2}^4 dy \int_{\frac{y^2}{2}-3}^{y+1} xy \, dx = \int_{-2}^4 \left(\frac{x^2}{2} y \right) \Big|_{\frac{y^2}{2}-3}^{y+1} dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-2}^4 y \left((y+1)^2 - \left(\frac{1}{2}y^2 - 3 \right)^2 \right) dy = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-2}^4 \left(-\frac{y^5}{4} + 4y^3 + 2y^2 - 8y \right) dy \\
 &= \frac{1}{2} \left(-\frac{y^6}{24} + y^4 + 2\frac{y^3}{3} - 4y^2 \right) \Big|_{-2}^4 = 36.
 \end{aligned}$$

Estudando a regularidade de D segundo o eixo dos yy , ou seja, fazendo uma inversão da ordem de integração de $dx dy$ para $dy dx$, obtem-se uma divisão de D em dois sub-domínios de integração separados pela recta vertical de equação $x = -1$.

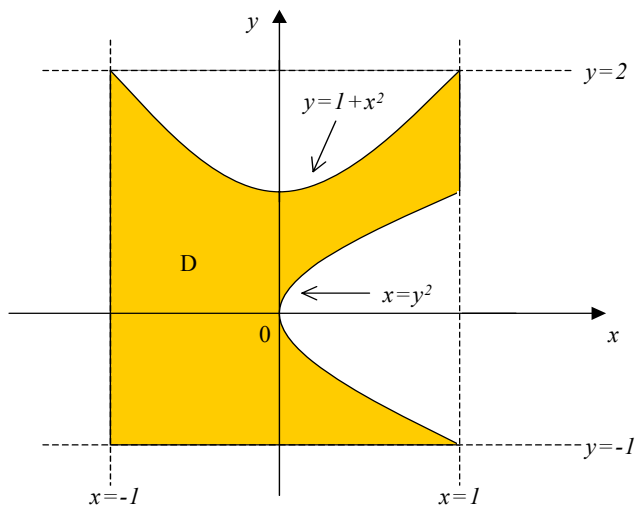


Tem-se então o sub-domínio de integração D_1 (regular no sentido do eixo dos yy) limitado pelas rectas verticais de equação $x = -3$ e $x = -1$ e pelas curvas horizontais $y = g_1(x) = -\sqrt{2x+6}$ (curva inferior) e $y = g_2(x) = \sqrt{2x+6}$ (curva superior) e o sub-domínio D_2 (regular o sentido do eixo dos yy) limitado pelas rectas verticais $x = -1$ e $x = 5$ e pelas curvas horizontais $y = g_3(x) = x - 1$ (curva inferior) e $y = g_4(x) = \sqrt{2x+6}$ (curva superior).

Então a ordem de integração é $dydx$ e o integral iterado á calcular é dado por

$$\begin{aligned} \iint_D (xy) \, dx dy &= \iint_{D_1} (xy) \, dx dy + \iint_{D_2} (xy) \, dx dy \\ &= \int_{-3}^{-1} dx \int_{-\sqrt{2x+6}}^{\sqrt{2x+6}} xy dy + \int_{-1}^5 dx \int_{x-1}^{\sqrt{2x+6}} xy dy = 36. \end{aligned}$$

Exemplo 9. Explicita o integral duplo $\iint_D (xy) \, dx dy$, sendo D definido como na figura seguinte:



Regularidade segundo o eixo dos $yy \implies$ ordem de integração $dydx$

$$\begin{aligned} \iint_D (xy) \, dx dy &= \iint_{D_1} (xy) \, dx dy + \iint_{D_2} (xy) \, dx dy + \iint_{D_3} (xy) \, dx dy = \\ &= \int_{-1}^0 dx \int_{-1}^{1+x^2} f(x, y) \, dy + \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{1+x^2} f(x, y) \, dy + \int_0^1 dx \int_{-1}^{-\sqrt{x}} f(x, y) \, dy. \end{aligned}$$

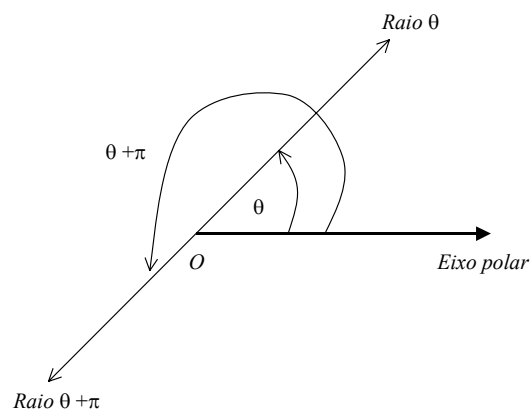
Regularidade segundo o eixo dos $xx \implies$ ordem de integração $dx dy$

$$\begin{aligned} \iint_D (xy) \, dx dy &= \iint_{D_1} (xy) \, dx dy + \iint_{D_2} (xy) \, dx dy + \iint_{D_3} (xy) \, dx dy = \\ &= \int_{-1}^1 dy \int_{-1}^{y^2} f(x, y) \, dx + \int_1^2 dy \int_{-1}^{-\sqrt{y-1}} f(x, y) \, dx + \int_1^2 dy \int_{\sqrt{y-1}}^1 f(x, y) \, dx. \end{aligned}$$

1.3 Mudança de variável: coordenadas polares

Quando se utilizam coordenadas rectangulares (x, y) o sistema de referência é dado por um par de rectas perpendiculares (os bem conhecidos eixos dos xx e dos yy). Para definir

as coordenadas polares é utilizado um sistema de referência que consta de um ponto O chamado **pólo** e de um raio que se inicia no ponto O designado por **eixo polar**.



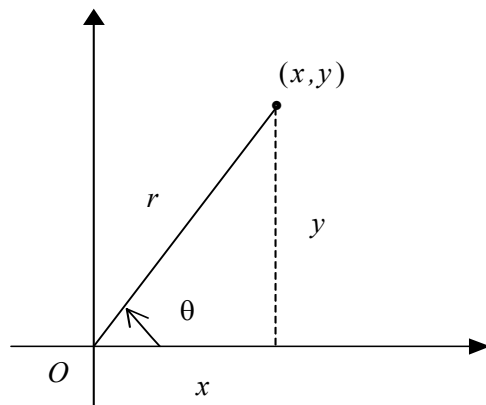
Concretamente, um ponto P é dado pelas coordenadas polares (r, θ) se está posicionado a uma distância r do pólo O tal que semi-recta OP determina um ângulo de amplitude θ radianos (medido no sentido positivo) com o semi-eixo positivo dos xx .

Contrariamente ao que acontece com as coordenadas rectangulares, as coordenadas polares não estão univocamente determinadas. De facto, geometricamente não existe distinção entre os pontos cujos ângulos diferam por um múltiplo de 2π , isto é $(r, \theta) = (r, \theta + 2n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}^+$. É, no entanto, usual considerar θ a amplitude do menor dos ângulos. Tem-se então $r \in \mathbb{R}_0^+$ e $\theta \in [0, 2\pi[$.

A relação entre as coordenadas polares (r, θ) e as coordenadas rectangulares (x, y) é dada por

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

visto que $\cos \theta = \frac{x}{r}$ e $\sin \theta = \frac{y}{r}$ (ver figura abaixo),



o que implica que

$$\begin{cases} \tan \theta = \frac{y}{x}, \text{ ou seja } \theta = \arctan \frac{y}{x} \\ r^2 = x^2 + y^2 \end{cases}.$$

1.3.1 Exemplos

1. Determine as coordenadas retangulares do ponto P dado pelas seguintes coordenadas polares $(r, \theta) = (2, \pi/3)$.

Atendendo as relações $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$ obtem-se $x = 2 \cos(\pi/3) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ e $y = 2 \sin(\pi/3) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. Portanto o ponto P tem as coordenadas retangulares $(1, \sqrt{3})$.

2. Encontre as coordenadas polares para o ponto P definido pelas seguintes coordenadas retangulares $(x, y) = (-2, 2\sqrt{3})$.

Trata-se de um ponto do segundo quadrante. Sabemos que $r \cos \theta = -2$ e $r \sin \theta = 2\sqrt{3}$. Encontra-se o seguinte valor para o raio r fazendo $r^2 = x^2 + y^2 = (r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 = (-2)^2 + (2\sqrt{3})^2 = 16$. Logo $r = 4$. Considerando $r = 4$ obtem-se

$$\begin{aligned} x = r \cos \theta = 4 \cos \theta = -2 &\implies \cos \theta = -\frac{1}{2} \\ y = r \sin \theta = 4 \sin \theta = 2\sqrt{3} &\implies \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}.$$

Tem-se então $\theta = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \arccos(-\frac{1}{2}) = \frac{2}{3}\pi$. Então as coordenadas polares de P são $(4, \frac{2}{3}\pi)$.

3. Em coordenadas rectangulares (x, y) a circunferência de centro $C(0, 0)$ e raio a tem por equação $x^2 + y^2 = a^2$. A mesma circunferência, em coordenadas polares (r, θ) , tem por equação $r = a$. O interior da circunferência é definido por $0 < r < a$ e o exterior por $r > a$.

4. Em coordenadas rectangulares (x, y) a recta que passa pela origem e faz um ângulo α com o eixo dos xx tem por equação $y = mx$ onde $m = \tan \alpha$. Em coordenadas polares (r, θ) , a mesma recta, tem por equação $\theta = \alpha$.

A recta vertical $x = a$ tem por equação polar $r \cos \theta = a$ e a recta horizontal $y = b$ tem por equação polar $r \sin \theta = b$. Mais geral, uma recta de equação cartesiana $Ax + By + C = 0$ pode ser escrita em coordenadas polares (atendendo as relações $x = r \cos \theta$ e $r = \sin \theta$) como

$$Ar \cos \theta + B \sin \theta + C = r(A \cos \theta + B \sin \theta) + C = 0.$$

5. Encontre uma equação em coordenadas polares para a hipérbole de equação $x^2 - y^2 = a^2$.

Substituindo $x = r \cos \theta$ e $r = \sin \theta$ na equação da hipérbole obtem-se

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta = r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = \\ &= r^2 \cos(2\theta) = a^2 \end{aligned}$$

Portanto a equação $r^2 \cos(2\theta) = a^2$ representa, em coordenadas polares, a hipérbole dada.

Dado o integral duplo

$$\int \int_D f(x, y) dx dy,$$

sempre que o domínio de integração D é dado por uma região circular ou quando a função integranda $f(x, y)$ contém uma expressão de tipo $x^2 + y^2$, pode ser útil o uso de coordenadas polares para calcular o valor do integral duplo.

Relembramos que as coordenadas polares (r, θ) de um ponto P estão relacionadas com as coordenadas rectangulares (x, y) por meio das seguintes equações

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

Apresenta-se em seguida a metodologia de cálculo dos integrais duplos

$$\int \int_D f(x, y) \, dx dy$$

utilizando as coordenadas polares (r, θ) . O primeiro passo consta em transformar o domínio de integração D (dado em coordenadas cartesianas) no domínio equivalente, Ω , em coordenadas polares (r, θ) .

Admitindo que a função $f(x, y)$ é contínua em D , a função composta

$$F(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

também vai ser contínua em todos os pontos do seu domínio Ω . Considerando a mudança de variáveis para coordenadas polares, tem-se então que

$$\int \int_D f(x, y) \, dx dy = \int \int_{\Omega} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \, r \, dr d\theta = \int \int_{\Omega} F(r, \theta) \, r \, dr d\theta$$

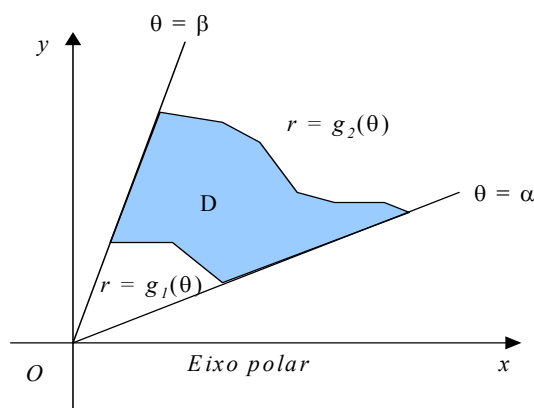
visto que r é o valor do determinante da matriz jacobiana $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ e $r \geq 0$.

Se o conjunto Ω é definido por

$$\Omega = \{(r, \theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, \, g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta)\}$$

para $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$, então a ordem de integração em coordenadas polares será $dr d\theta$ (o domínio Ω sendo regular segundo r) e então o integral duplo escreve-se como

$$\int \int_D f(x, y) \, dx dy = \int \int_{\Omega} F(r, \theta) \, r \, dr d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} F(r, \theta) \, r \, dr$$



Este caso obtém-se quando o domínio D provém da intersecção de duas rectas que passam pela origem e de declive α e β e mais outras duas curvas quaisquer (veja figura acima).

Se o conjunto Ω tem a forma

$$\Omega = \{(r, \theta) \mid a \leq r \leq b, h_1(r) \leq \theta \leq h_2(r)\},$$

então a ordem de integração em coordenadas polares será $d\theta dr$ (o domínio Ω sendo regular segundo θ) e então o integral duplo escreve-se como

$$\int \int_D f(x, y) \, dx dy = \int \int_{\Omega} F(r, \theta) r \, dr d\theta = \int_a^b dr \int_{h_1(r)}^{h_2(r)} F(r, \theta) r \, d\theta.$$

Este caso resulte quando o domínio D provém da intersecção de duas circunferências com centro na origem e de raio a e b e mais outras duas curvas.

Caso em qual o domínio D é o resultado da intersecção de duas circunferências com centro na origem e duas rectas que passam pela origem, então o domínio em coordenadas polares, Ω , será regular nos dois sentidos permitidos e a ordem de integração é aleatória.

Como caso particular pode afirmar-se que a área do domínio de integração D pode ser calculada em termos de coordenadas polares utilizando a seguinte fórmula

$$\text{Área de } D = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} r \, dr = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (g_2^2(\theta) - g_1^2(\theta)) \, d\theta$$

considerando $f(x, y) = 1$.

Exemplo 1. Utilize coordenadas polares para calcular o valor do integral duplo

$$\int \int_D xy \, dx dy$$

onde D é definido por $\{x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.

Representação gráfica do domínio de integração D em coordenadas rectangulares:

Cálculo do novo domínio de integração Ω e sua representação gráfica:

$$0 \leq x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r^2 \leq 1$$

de onde $0 < r^2 \leq 1$ implica $0 < r \leq 1$ ou seja $g_1(\theta) = 0$ e $g_2(\theta) = 1$. (Ou ainda, atendendo um dos exemplos da secção anterior, sabe-se que $x^2 + y^2 = 1$ tem por equação polar $r = 1$ e o seu interior é dado por $0 < r < 1$).

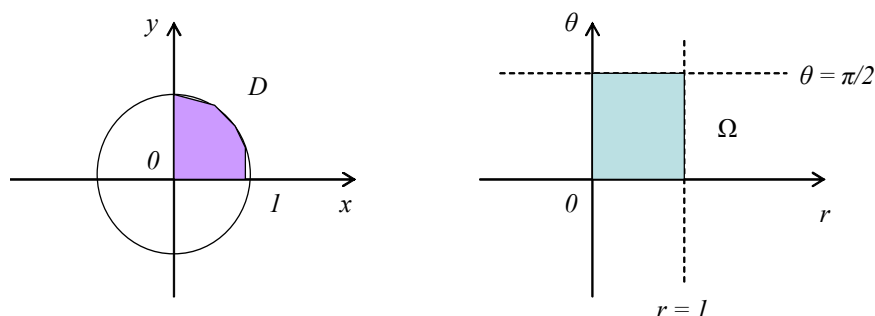


Figura 1.1:

A equação $x = 0$ tem a forma polar $r \cos \theta = 0 \Rightarrow \cos \theta = 0$. A equação $y = 0$ tem a forma polar $r \sin \theta = 0 \Rightarrow \sin \theta = 0$. A equação $\sin \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$ representa o limite inferior de θ e o limite superior de θ é dado pelo valor $\pi/2$ visto que $\cos \theta = 0$. Tem-se então

$$\Omega = \left\{ (r, \theta) : 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ e } 0 < r < 1 \right\}.$$

O domínio Ω é regular nos dois sentidos (o seu gráfico é um rectângulo), logo são permitidas as duas ordens de integração.

A função $f(x, y) = xy$ em coordenadas polares vem

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = F(r, \theta) = (r \cos \theta)(r \sin \theta) = r^2 \sin \theta \cos \theta.$$

Então, escolhendo a ordem de integração $drd\theta$, tem-se que

$$\begin{aligned} \iint_D xy \, dx dy &= \iint_{\Omega} r^2 \sin \theta \cos \theta \, r \, dr d\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 r^3 \sin \theta \cos \theta \, dr = \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{r^4}{4} \sin \theta \cos \theta \right) \Big|_0^1 d\theta = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{4} \sin \theta \cos \theta \right) d\theta = \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} (\sin 2\theta) d\theta = \left(-\frac{1}{16} \cos 2\theta \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Exemplo 2. Calcule

$$\iint_D \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \, dx dy,$$

sendo D limitado pelas rectas $y = \pm x$ e pelas circunferências $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ e $(x - 2)^2 + y^2 = 4$.

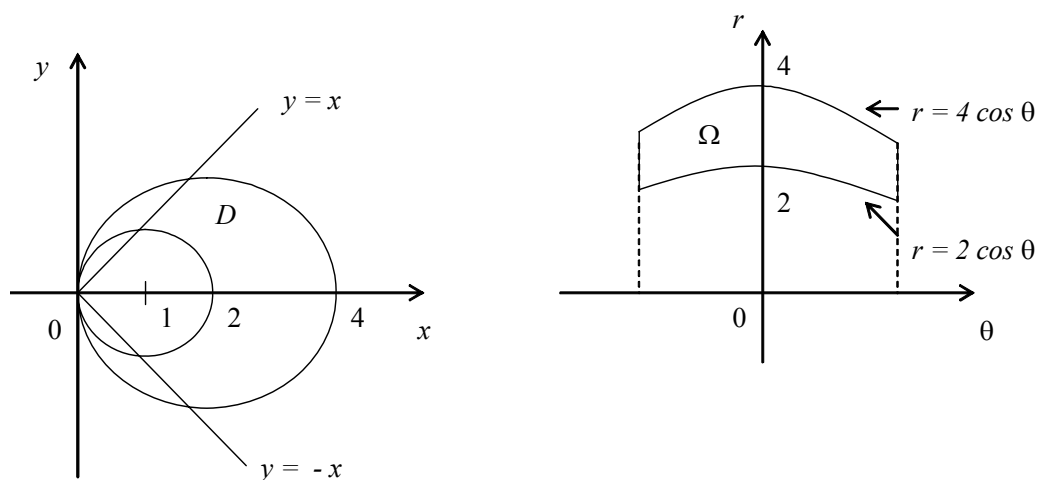


Figura 1.2:

O transformado de D (veja a sua representação gráfica) em coordenadas polares, o conjunto Ω , é dado pelas relações

$$\begin{aligned} (x-1)^2 + y^2 \geq 1 &\Rightarrow r \geq 2 \cos \theta \quad \text{e} \quad (x-2)^2 + y^2 \leq 4 \Rightarrow r \leq 4 \cos \theta \\ -x &\leq y \leq x \Rightarrow -r \cos \theta \leq r \sin \theta \leq r \cos \theta \\ &\Rightarrow -1 \leq \tan \theta \leq 1 \Rightarrow -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

ou seja

$$\Omega = \left\{ (r, \theta) : -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 2 \cos \theta \leq r \leq 4 \cos \theta \right\}.$$

Nota-se que a ordem de integração permitida é $drd\theta$ (o domínio Ω é regular no sentido do eixo dos rr) e o integral duplo escreve-se em coordenadas polares como sendo

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} dx dy &= \iint_{\Omega} \frac{\sin \theta}{\cos \theta + 1} r dr d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\theta \int_{2 \cos \theta}^{4 \cos \theta} \frac{\sin \theta}{\cos \theta + 1} r dr \\ &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\sin \theta}{\cos \theta + 1} \left(\frac{r^2}{2} \right) \Big|_{2 \cos \theta}^{4 \cos \theta} d\theta = 6 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\sin \theta}{\cos \theta + 1} \cos^2 \theta d\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

(o valor do itegral é nulo porque a função integranda é ímpar e os limites de integração simétricos, logo $A = A_1 - A_1 = 0$).

1.4 Integrais duplos - Exercícios propostos

1. Determine as expressões gerais das primitivas para as funções:

(a) $f(x, y) = x^3 + 6y^2 - 5xy^2 - 10x^2y^3$

(b) $f(x, y) = (x^2 + y)^4 x$

(c) $f(x, y) = \frac{y}{x + y^2}$

(d) $f(x, y) = \frac{10y}{x^2 - 9}$

(e) $f(x, y) = \frac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2}$

(f) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{4 - (x + y)^2}}$

(g) $f(x, y) = \frac{10}{3x + y^2}$

(h) $f(x, y) = 20(x^2 - y^2)^{-1}$

(i) $f(x, y) = \ln x + y$

(j) $f(x, y) = \ln\left(2x + \frac{y}{3}\right)$

(k) $f(x, y) = \frac{10}{x^2 - y^2}$

(l) $f(x, y) = \frac{x}{(x^2 + y)^4}$

(m) $f(x, y) = \frac{2y}{x^2 - 16}$

(n) $f(x, y) = \sqrt{4x - y^2}$

(o) $f(x, y) = \arctan(x + y)$

(p) $f(x, y) = \sin^2(3x + y)$

2. Mostre que

$$\int_1^2 \left(\int_x^{2x^2} (x^3 + 2y) dy \right) dx = \frac{559}{15}.$$

3. Calcule o valor do integral duplo

$$\int \int_D (x^3 + 2y) dx dy$$

sendo D a região do plano limitada pelas curvas $x = 1$, $x = 2$, $y = 2x^2$ e $y - x = 0$ e para cada uma das possíveis ordens de integração, $\int (\int f(x, y) dx) dy$ e $\int (\int f(x, y) dy) dx$.

4. Determine $\int \int_D f(x, y) dx dy$ considerando $f(x, y) = xy^2$ e

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Averígue se pode retirar algumas conclusões acerca do valor e sinal do mesmo integral para outros domínios de integração como sejam

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y, y \geq -x, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

5. Mostre que

$$\int \int_D xy^2 dx dy = \frac{212}{3}$$

sendo D o paralelogramo limitado pelas rectas $x = 3$, $x = 5$, $3x + 2y - 4 = 0$ e $2y + 3x = 1$.

6. Determine o valor do integral duplo

$$\int \int_D e^{y^2} dx dy$$

sendo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \wedge \frac{x}{2} \leq y \leq 3\}$.

7. Calcule e nos casos possíveis inverte a ordem de integração para os seguintes integrais duplos

$$(a) \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \sin\left(\frac{y^3 + 1}{2}\right) dy dx$$

$$(b) \int_{-1-\sqrt{y+1}}^0 \int_{\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}} x^2 dx dy$$

$$(c) \int_0^1 \int_{x^2}^1 \left(\frac{x^3}{\sqrt{x^4 + y^2}} \right) dy dx$$

$$(d) \int_1^2 \int_0^{\log x} e^{-x} dx dy$$

$$(e) \int_0^1 \int_y^1 e^{y/x} dx dy$$

$$(f) \int_0^1 \int_x^1 x^2 e^{y^4} dx dy$$

8. Considere o integral duplo

$$\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x} f(x, y) dy.$$

Estabeleça a outra ordem de integração e calcule o valor do integral para $f(x, y) = \sqrt{2}x$.

9. Inverta a ordem de integração no seguinte integral duplo

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x, y) dx.$$

10. Considere o integral duplo

$$\int_0^1 dy \int_{-1+\sqrt{y}}^{-\ln y} f(x, y) dx.$$

Inverta a ordem de integração e mostre que tem o valor $\frac{10}{63}$ para o caso de $f(x, y) = y^2$.

11. Determine o valor do integral duplo

$$\int_0^{\frac{1}{4}} dy \int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1-4y}{4}}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1-4y}{4}}} f(x, y) dx$$

para $f(x, y) = e^{\frac{y}{x}+x}$.

12. Verifique que o valor do integral duplo

$$\int_1^{\infty} dx \int_0^{\frac{1}{x^4}} x e^{x^2 \sqrt{y}} dy = 1.$$

13. Mostre, usando cada uma das possíveis ordens de integração, que $2/5$ é o valor do integral duplo

$$\iint_D xy^2 dx dy$$

para $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x \wedge xy \leq 1\}$.

14. Considere o integral duplo

$$\int_{-1}^0 dy \int_{1+\sqrt{-y}}^2 f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{2-\sqrt{1-y^2}}^2 f(x, y) dx.$$

- (a) Inverta a ordem de integração.
 (b) Calcule o valor do integral para $f(x, y) = y$.
15. Verifique que

$$\iint_D (2x^3y + xy^2) dx dy = 4$$

para D definido pelas condições $y = x^2 + 1$, $y = x^2$, $xy = 3$ e $xy = 1$.

16. Passar às coordenadas polares (r, θ) , no integral duplo $\iint_D f(x, y) dx dy$ e encontrar os limites de integração onde

- (a) $D = \{x^2 + y^2 \leq 4\}$
 (b) $D = \{x^2 + y^2 \leq 9x\}$
 (c) $D = \{x^2 + y^2 = 4x, x^2 + y^2 = 8x, y = x, y = 2x\}$
 (d) $D = \{1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$

17. Utilizando dois métodos diferentes calcule as áreas dos domínios de integração que se indicam

- (a) $D = \{x = 0, y = 0, x + y = 1\}$

(b) $D = \{y = x, y = 5x, x = 1\}$

(c) $D = \{y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}, x = 4\}$

18. Passando aos coordenadas polares calcule os seguintes integrais duplos

(a)
$$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$$

(b)
$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy dx$$

(c)
$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2} dy dx$$

(d)
$$\int_{1/2}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2)^{3/2} dy dx$$

(e)
$$\int_0^{1/2} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy \sqrt{x^2 + y^2} dy dx$$

(f)
$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

(g)
$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} x^2 y^2 dx dy$$

19. Utilizando as coordenadas polares, calcule os seguintes integrais duplos:

(a) $\iint_D (3x + 4y^2) dx dy$, onde $D = \{x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$

(b) $\iint_D x dx dy$, onde $D = \{x^2 + y^2 \leq 25\}$

(c) $\iint_D y dx dy$, onde D é a região do plano real limitada por $x^2 + y^2 = 9$, $y = 0$ e $y = x$.

(d) $\int \int_D xy dx dy$, onde D é a região do 1º quadrante do plano real limitada por $x^2 + y^2 = 4$. e $x^2 + y^2 = 25$.

(e) $\int \int_D e^{-x^2-y^2} dx dy$, onde D é a região do plano real limitada por $x = \sqrt{4-y^2}$ e $x = 0$.

20. Calcule o integral duplo

$$\int \int_D \frac{1}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} dx dy$$

onde D é o triângulo de vertices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,1)$.

21. Calcule o integral duplo

$$\int \int_D \sqrt{x^2+y^2} dx dy$$

onde D é o triângulo de vertices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1, \sqrt{3})$.

22. Calcule

$$\int \int_D \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$$

sabendo que o domínio de integração D é

$$D = \{1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq x \leq y \leq 2x\}.$$

23. Calcule $\int \int_D (x^2 + y^2) dx dy$ sendo D limitado pelas curvas de equação $y = x$, $y = x^2$ e $y = 2x^2$.

1.5 Cálculo de Volumens

- Os integrais duplos podem ser utilizados no cálculo:

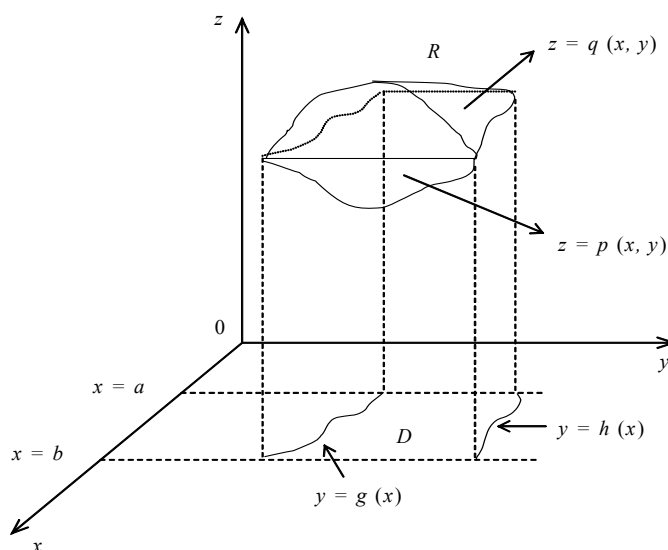
– de **áreas**, sendo

$$A(D) = \int \int_D 1 dx dy$$

– de **volumes**, sendo

$$V(S) = \iint_D (q(x, y) - p(x, y)) \, dx dy$$

o volume do sólido S compreendido entre os gráficos das funções $q(x, y)$ (limita o sólido superiormente) e $p(x, y)$ (limita o sólido inferiormente), no domínio $D \subset \mathbb{R}^2$.



Exemplo 1. Calcule o volume da região do espaço limitada pelas superfícies $z + x^2 + y^2 = b^2$, $z = 0$, $|x| = a$ e $|y| = a$ ($0 < a < b$).

A superfície $z + x^2 + y^2 = b^2$ corresponde a um parabolóide que se desenvolve ao longo do z -eixo com vértice $(0, 0, b^2)$.

A condição $|x| = a$ caracteriza os planos paralelos ao yz -plano de equações $x = a$ e $x = -a$.

A condição $|y| = a$ caracteriza os planos paralelos ao xz -plano de equações $y = a$ e $y = -a$.

A condição $z = 0$ define o xy -plano.

Uma maior secção plana D desta região do espaço R é o quadrado no xy -plano de vértices (a, a) , $(-a, a)$, $(a, -a)$ e $(-a, -a)$, isto é,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -a \leq x \leq a \wedge -a \leq y \leq a\}$$

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D \wedge 0 \leq z \leq b^2 - x^2 - y^2\}.$$

O volume pedido pode ser calculado por:

$$\begin{aligned} V &= \iiint_D (b^2 - x^2 - y^2) \, dx \, dy \\ &= \int_{-a}^a \left(\int_{-a}^a (b^2 - x^2 - y^2) \, dy \right) dx = \int_{-a}^a b^2 y - x^2 y - \frac{y^3}{3} \Big|_{y=-a}^{y=a} dx \\ &= \int_{-a}^a 2b^2 a - 2ax^2 - 2\frac{a^3}{3} dx = 2b^2 ax - 2a\frac{x^3}{3} - 2\frac{a^3}{3}x \Big|_{x=-a}^{x=a} \\ &= 4b^2 a^2 - 8\frac{a^4}{3}. \end{aligned}$$

Exemplo 2. Calcule o volume da região do espaço situada no 1º octante limitado pelas superfícies $x = 1$, $z = x + y$ e $x = \sqrt{4 - y}$.

As superfícies $x = 1$ e $z = x + y$ são planos.

A superfície $x = \sqrt{4 - y}$ é um cilindro parabólico que se desenvolve ao longo do z -eixo dado que temos a equivalência

$$x = \sqrt{4 - y} \Leftrightarrow x^2 = 4 - y \wedge x \geq 0.$$

Uma maior secção plana D desta região do espaço R é, no xy -plano, isto é, temos

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 4 - x^2\}$$

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D \wedge 0 \leq z \leq x + y\}.$$

O volume pedido pode ser calculado por:

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (x + y) \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_0^{4-x^2} (x + y) \, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=4-x^2} dx = \int_0^1 x(4 - x^2) + \frac{(4 - x^2)^2}{2} dx \\ &= \int_0^1 4x - x^3 + \frac{16 + x^4 - 8x^2}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (8x - 2x^3 + 16 + x^4 - 8x^2) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[4x^2 - \frac{x^4}{2} + 16x + \frac{x^5}{5} - 8\frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[4 - \frac{1}{2} + 16 + \frac{1}{5} - \frac{8}{3} \right]. \end{aligned}$$

Exemplo 3. Calcule o volume da região do espaço limitada pelas superfícies $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z + y = 2a$ e $z = 0$ ($0 < b < 2a$).

A superfície $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ corresponde a um cilindro elíptico que se desenvolve ao longo do z -eixo.

A superfície $z + y = 2a$ é um plano paralelo ao x -eixo.

A superfície $z = 0$ é o xy -plano.

Uma maior secção plana D desta região do espaço R é a elipse no xy -plano de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Temos

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

$$R = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D \wedge 0 \leq z \leq 2a - y \}.$$

O volume pedido pode ser calculado por:

$$V = \iint_D (2a - y) dx dy$$

e, aplicando a mudança de variáveis $\begin{cases} \frac{x}{a} = X \\ \frac{y}{b} = Y \end{cases}$ a que corresponde o jacobiano $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(X, Y)} \right| = ab$, temos

$$V = \iint_{D'} (2a - bY) ab dXdY.$$

Aplicando coordenadas polares, temos

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (2a - br \sin \theta) abr dr \right) d\theta = ab \int_0^{2\pi} \left[2a \frac{r^2}{2} - b \frac{r^3}{3} \sin \theta \right]_{r=0}^{r=1} d\theta \\ &= ab \int_0^{2\pi} \left(a - b \frac{1}{3} \sin \theta \right) d\theta = ab \left[a\theta + b \frac{1}{3} \cos \theta \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \\ &= ab \left(a2\pi + b \frac{1}{3} - b \frac{1}{3} \right) = 2\pi a^2 b. \end{aligned}$$

Exemplo 4. Calcule o volume da região do espaço limitada pelas superfícies $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $xy = 1$, $x = 2$, $y = 0$ e $z = 0$.

A superfície $z = x^2 + y^2$ corresponde a um parabolóide que se desenvolve ao longo do z -eixo de vértice $(0, 0, 0)$ com todos os pontos de cota positiva.

A superfície $y = x^2$ é um cilindro parabólico que se desenvolve ao longo do z -eixo.

A superfície $xy = 1$ corresponde a um cilindro hiperbólico que se desenvolve ao longo do z -eixo.

A superfície $x = 2$ é um plano paralelo ao yz -plano.

As superfícies $y = 0$ e $z = 0$ são, respectivamente, o xz -plano e o xy -plano.

Uma maior secção plana D desta região do espaço R é, no xy -plano, isto é, temos

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq x^2 \right\} \\ \cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq \frac{1}{x} \right\}$$

$$R = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D \wedge 0 \leq z \leq x^2 + y^2 \right\}.$$

O volume pedido pode ser calculado por:

$$V = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy \\ = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} (x^2 + y^2) dy \right) dx + \int_1^2 \left(\int_0^{\frac{1}{x}} (x^2 + y^2) dy \right) dx \\ = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=x^2} dx + \int_1^2 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=\frac{1}{x}} dx \\ = \int_0^1 \left(x^4 + \frac{x^6}{3} \right) dx + \int_1^2 \left(x + \frac{1}{3x^3} \right) dx = \\ = \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{21} \right]_{x=0}^{x=1} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{6x^2} \right]_{x=1}^{x=2} = \frac{1573}{840}.$$

Exemplo 5. Calcule o volume limitado pelas superfícies $x^2 + y^2 = 4$, $x + y + z = 2$ e $z = 0$.

A superfície $x^2 + y^2 = 4$ corresponde a um cilindro circular que se desenvolve ao longo do z -eixo.

A superfície $x + y + z = 2$ é um plano que intersecta os eixos coordenados em $x = 2$, $y = 2$ e $z = 2$.

A superfície $z = 0$ é o xy -plano.

O volume pedido pode ser calculado por

$$V = \iint_D (2 - x - y) dx dy.$$

Pode aplicar-se coordenadas polares a uma parte do domínio D :

$$\begin{aligned}
 V &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \left(\int_0^2 (2 - r \cos \theta - r \sin \theta) r \, dr \right) d\theta + \int_0^2 \left(\int_0^{2-x} (2 - x - y) dy \right) dx \\
 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \left[r^2 - \frac{r^3}{3} \cos \theta - \frac{r^3}{3} \sin \theta \right]_{r=0}^{r=2} d\theta + \int_0^2 \left[2y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2-x} dx \\
 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \left(4 - \frac{8}{3} \cos \theta - \frac{8}{3} \sin \theta \right) d\theta + \int_0^2 \left(4 - 2x - 2x + x^2 - \frac{4 - 4x + x^2}{2} \right) dx \\
 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \left(4 - \frac{8}{3} \cos \theta - \frac{8}{3} \sin \theta \right) d\theta + \int_0^2 \left(4 - 6x + \frac{3}{2} x^2 \right) dx \\
 &= \left[4\theta - \frac{8}{3} \sin \theta + \frac{8}{3} \cos \theta \right]_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\theta=2\pi} + \left[4x - 3x^2 + \frac{1}{2} x^3 \right]_{x=0}^{x=2} \\
 &= 8\pi + \frac{8}{3} - 2\pi + \frac{8}{3} + 8 - 12 + 4 = 6\pi + \frac{16}{3}.
 \end{aligned}$$

1.6 Cálculo de volumes - Exercícios Propostos

1. Calcule o volume limitado pelas superfícies $x^2 + y^2 + z - 8 = 0$ e $x^2 + 3y^2 - z = 0$.
2. Calcule o volume limitado pelas superfícies $x^2 + y = 4$, $x^2 - y + 2 = 0$, $z = 2$ e $z = -1$.
3. Calcule o volume limitado pelas superfícies $x^2 + y^2 - 1 = 0$, $y = -1$ e $x^2 - y^2 + z^2 = 0$.
4. Calcule o volume da região do espaço definida pelas condições $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ e $z \leq \sqrt{3x^2 + 3y^2}$.
5. Utilizando os integrais duplos calcule os volumes dos sólidos limitados pelas seguintes superfícies

$$(a) \begin{cases} x^2 = 4y \\ 2y - x - 4 = 0 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} z = 1 - y^2 \\ 2x + 3y + z + 10 = 0 \\ x^2 + y^2 = z \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} z = 4 - x^2 - y^2 \\ z = 2 + y^2 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} z = 2 - x^2 - y^2 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \\ z = x^2 + y^2 + 1 \end{cases}$$

$$(g) \begin{cases} x + y = 1 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$$

$$(h) \begin{cases} y^2 = x \\ y^2 = 4x \\ z = 0 \\ x + z = 6 \end{cases}$$

$$(i) \begin{cases} z = 0 \\ 2y^2 = x \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1 \end{cases}$$

$$(j) \begin{cases} z = 1 \\ z = 12 - 3x - 4y \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$(k) \begin{cases} x = 3 \\ z = 0 \\ z = x^2 - y^2 \end{cases}$$

$$(l) \begin{cases} z = 0 \\ y = 1 \\ y = x^2 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$$

$$(m) \begin{cases} z = 0 \\ z = x + y + 10 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$(n) \begin{cases} 2x - z = 0 \\ 4x - z = 0 \\ x^2 + y^2 = 2x \end{cases}$$

6. Encontra o volume do sólido limitado superiormente pela superfície de equação $z = x + y$ e limitado inferiormente do triângulo de vertices $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$.

7. Calcule o volume do sólido limitado superiormente pelo plano $z = y + b$, inferiormente pelo plano xy e lateral pelo cilindro circular $x^2 + y^2 = b^2$, sendo b um número real.
8. Encontra o volume do elipsóide de equação

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{3} = 1.$$

9. Encontra o volume do sólido limitado superiormente pelo plano $z = 2x$ e limitado inferiormente pelo círculo $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$.
10. Encontra o volume do sólido limitado superiormente pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e limitado inferiormente pela região D que está dentro da curva $x^2 + y^2 = 2ax$.
11. Encontra o volume do sólido situado dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e fora do cilindro $x^2 + y^2 = 4$.
12. Calcule o volume do sólido limitado pelo parabolóide $z = 10 - 3x^2 - 3y^2$ e pelo plano $z = 4$.
13. Calcule o volume do sólido limitado pelos parabolóides $z = 3x^2 + 3y^2$ e $z = 4 - x^2 - y^2$.
14. Calcule o volume do sólido situado no interior do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e do elipsóide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 64$.

Capítulo 2

Integrais de Linha

2.1 Exercícios propostos

1. Calcule o valor do integral de linha

$$\int_C -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

ao longo da curva plana C definida pela equação $x^2 + y^2 = a^2$ e percorrida no sentido positivo.

2. Verifique que é igual a zero o valor do integral curvilíneo do campo de vectores

$$\vec{F}(x, y) = x\vec{e}_1 + xy\vec{e}_2$$

ao longo de qualquer circunferência de centro $(0, 0)$, mas que \vec{F} não é um campo gradiente ou conservativo (ou com potencial).

3. Calcule o valor do integral de linha

$$\int_C xz dx + xdy - yz dz$$

sendo C a curva no espaço constituída pela porção de circunferência de centro $O(0, 0, 0)$ que une o ponto $A(0, 0, 1)$ ao ponto $B(1, 0, 0)$ seguido de um segmento de recta que une $B(1, 0, 0)$ ao ponto $D(0, 1, 0)$ e de outro segmento de recta que une $D(0, 1, 0)$ ao ponto $E(0, 1, 1)$.

4. Dada a curva no espaço definida parametricamente por

$$\vec{r} \equiv \begin{cases} x = x \\ y = x^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

compreendida entre os pontos $A(-1, 1, 0)$ e $B(2, 4, 0)$, e sendo $f(x, y, z) = xyz + x^2 - y^3$, mostre que

$$\int_C f(x, y, z) dx = -\frac{108}{7}.$$

5. Sendo C o arco de circunferência $x^2 + y^2 = 1$ compreendido entre $A(0, 1, 0)$ e $B(1, 0, 0)$, verifique a igualdade

$$\int_C (x^2 y) dy = -\frac{1}{4}.$$

6. Mostre que $4ab^2/3$ é o valor do integral de linha

$$\int_C y^2 dx + x^2 dy$$

sendo C a porção da elipse entre os vértices $(a, 0)$ e $(-a, 0)$ passando pelo vértice $(0, b)$, com orientação positiva ($a, b > 0$).

7. Mostre que $\pi a^4/2$ é o valor do trabalho do campo de vectores

$$\vec{F}(x, y) = (-x^2 y, xy^2)$$

ao longo da circunferência $x^2 + y^2 = a^2$, percorrida no sentido positivo.

8. Utilize os processos indicados em cada uma das alíneas para calcular o trabalho de campo de vectores

$$\vec{F}(x, y) = (2(x^2 + y^2), (x + y)^2)$$

ao longo da curva plana C sendo esta o contorno do triângulo de vértices $A(1, 1)$, $B(2, 2)$ e $C(1, 3)$ percorrido no sentido positivo.

- (a) directamente pelas parametrizações;
- (b) usando o teorema de Green.

9. Determine, usando integrais de linha, a área do círculo.
10. Prove, utilizando integrais de linha, que πab é a área delimitada pela elipse de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

11. Utilize o teorema de Green para mostrar que o trabalho realizado pelo campo de vectores

$$\vec{F}(x, y) = (y + 3x)\vec{e}_1 + (2y - x)\vec{e}_2,$$

quando o ponto de aplicação da força dá uma volta no sentido positivo em torno da elipse de equação $4x^2 + y^2 = 4$, é de -4π .

12. Calcule o valor do integral de linha

$$\oint_C (2x - y + 4) dx + (5x + 3y - 6) dy$$

sendo C cada uma das seguintes curvas planas:

- (a) o contorno do triângulo de vértices $O(0, 0)$, $A(3, 0)$ e $B(3, 2)$;
- (b) a circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 4.
13. Mostre que é $3\pi a^2/8$ o valor da área da hipocicloide de equação $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ cuja parametrização é

$$\vec{r} \equiv \begin{cases} x = a \cos^3 \theta \\ y = a \sin^3 \theta \end{cases}, \text{ para } 0 \leq \theta < 2\pi.$$

14. Verifique que o campo de vectores

$$\vec{F}(x, y) = (y + 2x \exp y)\vec{e}_1 + (x - 2y + x^2 \exp y)\vec{e}_2$$

é conservativo ou gradiente (ou com potencial) e determine a respectiva função potencial associada. Calcule ainda o valor do trabalho do campo de vectores \vec{F} no deslocamento de uma partícula entre os pontos $(1, 1)$ e $(2, 4)$ da parábola de equação $y = x^2$.

15. Considere o integral de linha

$$\int_C x^2 y dx + \frac{x^3}{3} dy.$$

(a) Calcule o valor do integral de linha sendo C a curva plana definida por $y = x^2$ com $0 \leq x \leq 1$;

(b) Prove que existe uma função $f(x, y)$ tal que

$$df = x^2 y dx + \frac{x^3}{3} dy;$$

(c) Determine a função f tal que

$$\overrightarrow{\text{grad}f} = \left(x^2 y, \frac{x^3}{3} \right);$$

(d) Calcule o valor do integral de linha anterior usando a alínea b.

16. Calcule o valor do integral de linha

$$\int_C (2xy - y^4 + 3) dx + (x^2 - 4xy^3) dy$$

ao longo da curva plana C definida parametricamente por

$$\vec{r}(\theta) = (\sin \theta, \arcsin \theta)$$

entre $A(1, 0)$ e $B(0, 1)$.

17. Calcule o comprimento da curva plana definida por $x^2 + y^2 = a^2$.

18. Mostre que $\pi a(2b + a)$ é o valor do integral de linha

$$\int_C z dx + x dy + y dz$$

ao longo da espira de hélice de equações paramétricas $x(t) = a \cos t$, $y(t) = a \sin t$, $z(t) = bt$, para $t \in [0, 2\pi]$.

19. Mostre que

$$\int_{(P_1)}^{(P_2)} (z + y) dx + (x + z) dy + (x + y) dz = 280$$

ao longo da curva C no espaço parametrizada por $\vec{r}(t) = (t^2, t^3, t - 2)$ sabendo que $P_1(1, 1, -1)$ e $P_2(9, 27, 1)$.

20. Mostre a igualdade

$$\oint_{ABCA} xdx + zdy + ydz = 0$$

sendo $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ e $C(0, 0, 1)$.

21. Use a fórmula

$$\int_{(P_0)}^{(P_1)} f(x, y, z) d\vec{r} = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \|(x'(t), y'(t), z'(t))\| dt$$

para provar que

(a) com $\vec{r}(t) = (t, t^2, t^3)$, $P_0(1, 1, 1)$, $P_1(2, 4, 8)$, e $f(x, y, z) = xyz^2$ se tem

$$\int_{(P_0)}^{(P_1)} f(x, y, z) d\vec{r} = \int_1^2 t^9 \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4} dt;$$

(b) com $\vec{r}(\theta) = (4 \cos \theta, 4 \sin \theta, 2\theta)$, $P_0(4, 0, 0)$, $P_1(4, 0, 4\pi)$, e $f(x, y, z) = z^2$ se tem

$$\int_{(P_0)}^{(P_1)} f(x, y, z) d\vec{r} = \frac{64\sqrt{5}}{3} \pi^3.$$

22. Calcule o trabalho do campo de vetores

$$\vec{F}(x, y, z) = (xy^2, 1, z)$$

ao longo da curva C no espaço definida por

(a) $y = 2 \wedge z = -2t + 5$ entre os pontos $(1, 2, 3)$ e $(2, 2, 1)$;

(b) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \wedge x \leq 0 \wedge z = 0$.

2.2 Integrais de linha - Propostas de resolução

Exercise 1 Mostre que $\pi a^4/2$ é o valor do trabalho do campo de vetores

$$\vec{F}(x, y) = (-x^2y, xy^2)$$

ao longo da circunferência $x^2 + y^2 = a^2$, percorrida no sentido positivo.

O trabalho pedido pode ser calculado por

$$\begin{aligned} W &= \oint_C \vec{F} |d\vec{r}| = \oint_C (-x^2y, xy^2) |d\vec{r}| \\ &= \int_0^{2\pi} (-a^2 \cos^2 \theta a \sin \theta, a \cos \theta a^2 \sin^2 \theta) |(-a \sin \theta, a \cos \theta)| d\theta \end{aligned}$$

considerando a curva C parametrizada por

$$\vec{r}(\theta) \equiv \begin{cases} x(\theta) = a \cos \theta \\ y(\theta) = a \sin \theta \end{cases} \quad \text{para } \theta \in [0, 2\pi[.$$

Notemos que a expressão geral do vector tangente é $\frac{d\vec{r}}{d\theta} = (-a \sin \theta, a \cos \theta)$. Temos então

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{2\pi} (a^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + a^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta) d\theta = 2a^4 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta \\ &= 2a^4 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \cdot \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta = \frac{2a^4}{4} \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2(2\theta)) d\theta \\ &= \frac{a^4}{2} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{1 + \cos(4\theta)}{2}\right) d\theta = \frac{a^4}{2} \left[\theta - \frac{\theta}{2} + \frac{\sin(4\theta)}{8}\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \frac{a^4\pi}{2}. \end{aligned}$$

Exercise 2 Calcule o trabalho do campo de vectores

$$\vec{F}(x, y) = \left(2(x^2 + y^2), (x + y)^2\right)$$

ao longo da curva plana C sendo esta o contorno do triângulo de vértices $A(1, 1)$, $B(2, 2)$ e $C(1, 3)$ percorrido no sentido positivo.

A curva C é seccionalmente regular (represente a curva) sendo união de três arcos regulares C_1 , C_2 e C_3 que são, respectivamente, os segmentos de recta $[AB]$, $[BC]$ e $[CA]$.

O trabalho pedido pode ser calculado por

$$W = \oint_C \vec{F} |d\vec{r}| = \oint_{C_1} \vec{F} |d\vec{r}| + \oint_{C_2} \vec{F} |d\vec{r}| + \oint_{C_3} \vec{F} |d\vec{r}|.$$

Uma parametrização do arco C_1 , contido na recta $y = x$, é

$$\vec{r}(t) \equiv \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t \end{cases} \quad \text{para } t \in [1, 2]$$

a que corresponde a expressão geral do vector tangente $\frac{d\vec{r}}{dt} = (1, 1)$. Uma parametrização do arco C_2 , contido na recta $y = -x + 4$, é

$$\vec{r}(t) \equiv \begin{cases} x(t) = 4 - t \\ y(t) = t \end{cases} \quad \text{para } t \in [2, 3].$$

a que corresponde a expressão geral do vector tangente $\frac{d\vec{r}}{dt} = (-1, 1)$. Uma parametrização do arco C_3 , contido na recta $x = 1$, é

$$\vec{r}(t) \equiv \begin{cases} x(t) = 1 \\ y(t) = -t \end{cases} \quad \text{para } t \in [-3, -2]$$

a que corresponde a expressão geral do vector tangente $\frac{d\vec{r}}{dt} = (0, -1)$. Temos então

$$\begin{aligned} W &= \oint_{C_1} (2(x^2 + y^2), (x + y)^2) |d\vec{r}| + \oint_{C_2} (2(x^2 + y^2), (x + y)^2) |d\vec{r}| \\ &\quad + \oint_{C_3} (2(x^2 + y^2), (x + y)^2) |d\vec{r}| \\ &= \int_1^2 (4t^2, 4t^2) |(1, 1)| + \int_2^3 (2((4-t)^2 + t^2), 16) |(-1, 1)| \\ &\quad + \int_{-3}^{-2} (2(1+t^2), (1-t)^2) |(0, -1)| \\ &= \int_1^2 8t^2 dt + \int_2^3 (-16 + 16t - t^2) dt + \int_{-3}^{-2} (-1 + 2t - t^2) dt \\ &= 8 \left[\frac{t^3}{3} \right]_1^2 + \left[-16t + 8t^2 - \frac{t^3}{3} \right]_2^3 + \left[-t + t^2 - \frac{t^3}{3} \right]_{-3}^{-2} = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Exercise 3 Calcule o trabalho do campo de vectores

$$\vec{F}(x, y, z) = (xy^2, 1, z)$$

ao longo da curva C no espaço definida por **(a)** $y = 2 \wedge z = -2t + 5$ entre os pontos $(1, 2, 3)$ e $(2, 2, 1)$; **(b)** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \wedge x \leq 0 \wedge z = 0$.

(a) O trabalho pedido pode ser calculado por

$$W = \oint_C \vec{F} |d\vec{r}| = \oint_C (xy^2, 1, z) |d\vec{r}|$$

Uma parametrização de C é

$$\vec{r}(t) \equiv \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 2 \\ z(t) = -2t + 5 \end{cases} \quad \text{para } t \in [1, 2]$$

a que corresponde a expressão geral do vector tangente $\frac{d\vec{r}}{dt} = (1, 0, -2)$. Temos então

$$\begin{aligned} W &= \oint_C (xy^2, 1, z) |d\vec{r}| = \int_1^2 (4t, 1, -2t + 5) |(1, 0, -2)| = \int_1^2 (4t + 4t - 10) dt \\ &= [4t^2 - 10t]_1^2 = 16 - 20 - 4 + 10 = 2. \end{aligned}$$

(b) O trabalho pedido pode ser calculado por

$$W = \oint_C \vec{F} |d\vec{r}| = \oint_C (xy^2, 1, z) |d\vec{r}|$$

Uma parametrização de C é

$$\vec{r}(\theta) \equiv \begin{cases} x(t) = 4 \cos \theta \\ y(t) = 3 \sin \theta \\ z(t) = 0 \end{cases} \quad \text{para } \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

a que corresponde a expressão geral do vector tangente $\frac{d\vec{r}}{d\theta} = (-4 \sin \theta, 3 \cos \theta, 0)$. Temos então

$$\begin{aligned} W &= \oint_C (xy^2, 1, z) |d\vec{r}| = \int_1^2 (36 \cos \theta \sin^2 \theta, 1, 0) |(-4 \sin \theta, 3 \cos \theta, 0)| \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-144 \cos \theta \sin^3 \theta + 3 \cos \theta) d\theta = \left[-144 \frac{\sin^4 \theta}{4} + 3 \sin \theta \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = -6. \end{aligned}$$

Exercise 4 Mostre que $4ab^2/3$ é o valor do integral de linha

$$\int_C y^2 dx + x^2 dy$$

sendo C a porção da elipse entre os vértices $(a, 0)$ e $(-a, 0)$ passando pelo vértice $(0, b)$, para $a, b > 0$, com orientação positiva.

Uma parametrização de C é

$$\vec{r}(\theta) \equiv \begin{cases} x(\theta) = a \cos \theta \\ y(\theta) = b \sin \theta \end{cases} \quad \text{para } \theta \in [0, \pi]$$

a que corresponde a expressão geral do vector tangente $\frac{d\vec{r}}{d\theta} = (-a \sin \theta, b \cos \theta)$. Temos então

$$\begin{aligned} \int_C y^2 dx + x^2 dy &= \int_0^\pi b^2 \sin^2 \theta (-a \sin \theta) d\theta + a^2 \cos^2 \theta (b \cos \theta) d\theta \\ &= \int_0^\pi (-ab^2 \sin^3 \theta + a^2 b \cos^3 \theta) d\theta \\ &= \int_0^\pi (-ab^2 \sin \theta (1 - \cos^2 \theta) + a^2 b \cos \theta (1 - \sin^2 \theta)) d\theta \\ &= \int_0^\pi (-ab^2 \sin \theta + ab^2 \sin \theta \cos^2 \theta + a^2 b \cos \theta - a^2 b \cos \theta \sin^2 \theta) d\theta \\ &= \left[ab^2 \cos \theta - ab^2 \frac{\cos^3 \theta}{3} + a^2 b \sin \theta - a^2 b \frac{\sin^3 \theta}{3} \right]_0^\pi = -\frac{4}{3} ab^2. \end{aligned}$$

Exercise 5 Calcule o valor do integral de linha

$$\int_C xzdx + xdy - yzdz$$

sendo C a curva no espaço constituída pela porção de circunferência de centro $O(0,0,0)$ que une o ponto $A(0,0,1)$ ao ponto $B(1,0,0)$, seguido de um segmento de recta que une $B(1,0,0)$ ao ponto $D(0,1,0)$ e de outro segmento de recta que une $D(0,1,0)$ ao ponto $E(0,1,1)$.

A curva C é seccionalmente regular (represente a curva) sendo união de três arcos regulares C_1 , C_2 e C_3 que são, respectivamente, os arcos $[AB]$, $[BD]$ e $[DE]$. O trabalho pedido pode ser calculado por

$$W = \oint_C \vec{F} |d\vec{r}| = \oint_{C_1} \vec{F} |d\vec{r}| + \oint_{C_2} \vec{F} |d\vec{r}| + \oint_{C_3} \vec{F} |d\vec{r}|.$$

Uma parametrização do arco C_1 , contido na circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$, é

$$\vec{r}(\theta) \equiv \begin{cases} x(\theta) = \sin \theta \\ y(\theta) = 0 \\ z(\theta) = \cos \theta \end{cases} \quad \text{para } \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

a que corresponde a expressão geral do vector tangente $\frac{d\vec{r}}{d\theta} = (\cos \theta, 0, -\sin \theta)$. Uma parametrização do arco C_2 , contido na recta $y = -x + 1 \wedge z = 0$, é

$$\vec{r}(t) \equiv \begin{cases} x(t) = 1 - t \\ y(t) = t \\ z(t) = 0 \end{cases} \quad \text{para } t \in [0, 1].$$

a que corresponde a expressão geral do vector tangente $\frac{d\vec{r}}{dt} = (-1, 1, 0)$. Uma parametrização do arco C_3 , contido na recta $x = 0 \wedge y = 1$, é

$$\vec{r}(t) \equiv \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = 1 \\ z(t) = t \end{cases} \quad \text{para } t \in [0, 1]$$

a que corresponde a expressão geral do vector tangente $\frac{d\vec{r}}{dt} = (0, 0, 1)$. Temos então

$$\begin{aligned} W &= \oint_{C_1} (xz, x, -yz) |d\vec{r}| + \oint_{C_2} (xz, x, -yz) |d\vec{r}| + \oint_{C_3} (xz, x, -yz) |d\vec{r}| \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta \cos \theta, \sin \theta, 0) |(\cos \theta, 0, -\sin \theta) d\theta \\ &\quad + \int_0^1 (0, 1-t, 0) |(-1, 1, 0) dt + \int_0^1 (0, 0, -t) |(0, 0, 1) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta + \int_0^1 (1-t) dt + \int_0^1 -t dt \\ &= \left[-\frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[t - \frac{t^2}{2} \right]_0^1 - \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Exercise 6 Mostre que $\pi a(2b+a)$ é o valor do integral de linha

$$\int_C z dx + x dy + y dz$$

ao longo da espira de hélice de equações paramétricas $x(t) = a \cos t$, $y(t) = a \sin t$, $z(t) = bt$, para $t \in [0, 2\pi]$.

Uma parametrização de C é

$$\vec{r}(t) \equiv \begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = a \sin t \\ z(t) = bt \end{cases} \quad \text{para } t \in [0, 2\pi]$$

a que corresponde a expressão geral do vector tangente $\frac{d\vec{r}}{dt} = (-a \sin t, a \cos t, b)$. Temos então

$$\begin{aligned} \int_C z dx + x dy + y dz &= \int_0^{2\pi} bt(-a \sin t) dt + a \cos t(a \cos t) dt + a \sin t \cdot b dt \\ &= \int_0^{2\pi} -abt \sin t dt + a^2 \cos^2 t dt + ab \sin t dt \\ &= [abt \cos t]_0^{2\pi} - ab \int_0^{2\pi} \cos t dt + a^2 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt \\ &\quad + ab \int_0^{2\pi} \sin t dt \\ &= [abt \cos t]_0^{2\pi} - ab [\sin t]_0^{2\pi} + a^2 \left[\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin(2t) \right]_0^{2\pi} \\ &\quad + ab [-\cos t]_0^{2\pi} = a\pi(2b+a). \end{aligned}$$

Exercise 7 *Verifique que*

$$\vec{F}(x, y) = (y + 2x \exp y) \vec{e}_1 + (x - 2y + x^2 \exp y) \vec{e}_2$$

é um campo conservativo ou gradiente (ou com potencial) e determine a respectiva função potencial associada. Calcule ainda o valor do trabalho do campo de vectores \vec{F} no deslocamento de uma partícula entre os pontos $(1, 1)$ e $(2, 4)$ da parábola de equação $y = x^2$.

Trata-se de verificar se existe uma função $f(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = (y + 2x \exp y) dx + (x - 2y + x^2 \exp y) dy.$$

Para que tal aconteça, a função terá de verificar o teorema de Schwarz, ou seja, terá de se verificar

$$\frac{\partial (y + 2x \exp y)}{\partial y} = \frac{\partial (x - 2y + x^2 \exp y)}{\partial x}.$$

De facto ambas as derivadas têm por expressão $1 + 2x \exp y$. Podemos assim concluir que o campo de vectores \vec{F} é um campo conservativo. Quanto à determinação da função potencial f atenda-se a que ela verifica as igualdades

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= y + 2x \exp y \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x - 2y + x^2 \exp y. \end{aligned}$$

Como tal,

$$f(x, y) = \int (y + 2x \exp y) dx = yx + x^2 \exp y + C(y).$$

Dada a igualdade $\frac{\partial f}{\partial y} = x - 2y + x^2 \exp y$, sabemos ainda que

$$\begin{aligned} \frac{\partial (yx + x^2 \exp y + C(y))}{\partial y} &= x - 2y + x^2 \exp y \\ \Leftrightarrow x + x^2 \exp y + C'(y) &= x - 2y + x^2 \exp y \\ \Rightarrow C'(y) = 2y &\Rightarrow C(y) = y^2 + C \end{aligned}$$

Podemos então concluir que

$$f(x, y) = yx + x^2 \exp y + y^2.$$

O trabalho pedido pode ser calculado por

$$\begin{aligned}
 W &= \oint_C \vec{F} |d\vec{r}| = \oint_C (y + 2x \exp y, x - 2y + x^2 \exp y) \cdot (dx, dy) \\
 &= \oint_C (y + 2x \exp y) dx + (x - 2y + x^2 \exp y) dy \\
 &= \oint_C df = [f(x, y)]_{(1,1)}^{(2,4)} = f(2, 4) - f(1, 1) \\
 &= 6 + 4e^4 + 16 - (1 + e + 1) = 20 + 4e^4 - e.
 \end{aligned}$$

2.3 Com o Teorema de Green - Exercícios propostos

Exercise 8 Utilize o teorema de Green para calcular o trabalho de campo de vectores

$$\vec{F}(x, y) = (2(x^2 + y^2), (x + y)^2)$$

ao longo da curva plana C sendo esta o contorno do triângulo de vértices $A(1, 1)$, $B(2, 2)$ e $C(1, 3)$, percorrido no sentido positivo.

Exercise 9 Calcule o valor do integral de linha

$$\oint_C (1 + 10xy + y^2) dx + (6xy + 5x^2) dy$$

ao longo do contorno de um quadrado de lado a orientado positivamente.

Exercise 10 Calcule o valor do integral de linha

$$\oint_C (2xy^3 - y^2 \cos x) dx + (1 - 2y \sin x + 3x^2 y^2) dy$$

ao longo do contorno do paralelogramo de vértices $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(5, 2)$ e $(2, 2)$.

Exercise 11 Use o teorema de Green para calcular a área da elipse de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Exercise 12 Utilize o teorema de Green para calcular o trabalho de campo de vectores

$$\vec{F}(x, y) = (y + 3x)\vec{e}_1 + (2y - x)\vec{e}_2$$

quando o ponto de aplicação da força dá uma volta no sentido positivo em torno da elipse C de equação $4x^2 + y^2 = 4$.

2.3.1 Propostas de resolução

Exercise 13 Utilize o teorema de Green para calcular o trabalho de campo de vectores

$$\vec{F}(x, y) = (2(x^2 + y^2), (x + y)^2)$$

ao longo da curva plana C sendo esta o contorno do triângulo de vértices $A(1, 1)$, $B(2, 2)$ e $C(1, 3)$ percorrido no sentido positivo.

O trabalho pedido pode ser calculado por

$$\begin{aligned} W &= \oint_C \vec{F} |d\vec{r}| = \oint_C (2(x^2 + y^2), (x + y)^2) \cdot (dx, dy) \\ &= \oint_C 2(x^2 + y^2) dx + (x + y)^2 dy \\ &\stackrel{T.Green}{=} \iint_D \left(\frac{\partial (x + y)^2}{\partial x} - \frac{\partial 2(x^2 + y^2)}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \iint_D (2(x + y) - 4y) dx dy = \iint_D (2x - 2y) dx dy \end{aligned}$$

sendo D o triângulo de vértices $A(1, 1)$, $B(2, 2)$ e $C(1, 3)$ (faça o esboço da curva) e dado que C é uma curva fechada seccionalmente regular com orientação positiva. Temos então

$$\begin{aligned} W &= 2 \iint_D (x - y) dx dy = 2 \int_1^2 \left(\int_x^{4-x} (x - y) dy \right) dx \\ &= 2 \int_1^2 \left[xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=x}^{y=4-x} dx = 2 \int_1^2 \left(x(4-x) - \frac{(4-x)^2}{2} - x^2 + \frac{x^2}{2} \right) dx \\ &= 2 \int_1^2 (8x - 2x^2 - 8) dx = 4 \left[2x^2 - \frac{x^3}{3} - 4x \right]_1^2 = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Exercise 14 Calcule o valor do integral de linha

$$\oint_C (1 + 10xy + y^2) dx + (6xy + 5x^2) dy$$

ao longo do contorno de um quadrado de lado a orientado positivamente.

Consideremos o contorno do quadrado de vértices $(0, 0)$, $(a, 0)$, (a, a) e $(0, a)$. Trata-se de uma curva fechada seccionalmente regular orientada positivamente. Pelo teorema de

Green, temos

$$\begin{aligned} & \oint_C (1 + 10xy + y^2) dx + (6xy + 5x^2) dy \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial (6xy + 5x^2)}{\partial x} - \frac{\partial (1 + 10xy + y^2)}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \iint_D (6y + 10x - 10x - 2y) dx dy = \iint_D 4y dx dy \end{aligned}$$

sendo D o quadrado de vértices $(0, 0)$, $(a, 0)$, (a, a) e $(0, a)$. Temos então

$$\begin{aligned} & \oint_C (1 + 10xy + y^2) dx + (6xy + 5x^2) dy \\ &= \int_0^a \left(\int_0^a 4y dy \right) dx = 4 \int_0^a \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=a} dx = 4 \int_0^a \frac{a^2}{2} dx = 4 \frac{a^2}{2} [x]_0^a = 2a^3. \end{aligned}$$

Exercise 15 Calcule o valor do integral de linha

$$\oint_C (2xy^3 - y^2 \cos x) dx + (1 - 2y \sin x + 3x^2 y^2) dy$$

ao longo do contorno do paralelogramo de vértices $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(5, 2)$ e $(2, 2)$.

Trata-se de uma curva fechada seccionalmente regular com orientação positiva. Pelo teorema de Green, temos

$$\begin{aligned} & \oint_C (2xy^3 - y^2 \cos x) dx + (1 - 2y \sin x + 3x^2 y^2) dy \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial (1 - 2y \sin x + 3x^2 y^2)}{\partial x} - \frac{\partial (2xy^3 - y^2 \cos x)}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \iint_D (-2y \cos x + 6xy^2 - 6xy^2 + 2y \cos x) dx dy = \iint_D 0 dx dy = 0 \end{aligned}$$

sendo D o paralelogramo de vértices $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(5, 2)$ e $(2, 2)$.

Exercise 16 Use o teorema de Green para calcular a área da elipse de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Considerando a elipse com orientação positiva, podemos aplicar a fórmula

$$\text{área} = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx$$

obtida por aplicação do teorema de Green. Temos então

$$\begin{aligned} \text{área} &= \frac{1}{2} \oint_C xdy - ydx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a \cos t (b \cos t) dt - b \sin t (-a \sin t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab dt = \frac{1}{2} ab [t]_0^{2\pi} = \pi ab \end{aligned}$$

considerando a elipse parametrizada por

$$\vec{r}(t) \equiv \begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = b \sin t \end{cases} \quad \text{para } t \in [0, 2\pi].$$

Exercise 17 Utilize o teorema de Green para calcular o trabalho de campo de vectores

$$\vec{F}(x, y) = (y + 3x)\vec{e}_1 + (2y - x)\vec{e}_2$$

quando o ponto de aplicação da força dá uma volta no sentido positivo em torno da elipse C de equação $4x^2 + y^2 = 4$.

O trabalho pedido pode ser calculado por

$$\begin{aligned} W &= \oint_C \vec{F} |d\vec{r}| = \oint_C (y + 3x, 2y - x) |(dx, dy)| \\ &= \oint_C (y + 3x) dx + (2y - x) dy \\ &\stackrel{T.Green}{=} \iint_D \left(\frac{\partial (2y - x)}{\partial x} - \frac{\partial (y + 3x)}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \iint_D (-1 - 1) dx dy = -2 \iint_D dx dy \end{aligned}$$

sendo D a elipse de equação $4x^2 + y^2 = 4$ unida com o seu interior e atendendo a que esta é uma curva fechada regular. Atendendo à fórmula conhecida para a área da elipse, e dado que nesta o semi-eixo maior mede 4 e o semi-eixo menor mede 2, temos

$$W = -2 \iint_D dx dy = -2 \cdot \text{área de } D = -2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 1 = -4\pi.$$